3.11.19

נועה

מתמטיקה בדידה

לאו רציפה (כמו אינפי).

לוגיקה

לוגיקה פסוקית

להדפיס מה moodle
את דפי ההרצאה.
חובת הגשת תרגילים:
15% תרגיל, 85% מבחן.
ספרים מומלצים:
1) מתמטיקה בדידה - נתי ליניאל ומיכל פרנס
2) " - שי גירון, שני דר.

פסוק הוא משפט עם תשובה של אמת/שקר (T / F). (נקראים גם ערכי אמת).

נציג פסוקים באותיות (לרב x,y) והם יהיו תלויים בגורמים חיצוניים (כמו זמן, מיקום, צבע וכו').

פסוק מורכב: הוא פסוק שבנוי מפסוקים פשוטים וביניהם יש מילות קישור (לפחות קשר אחד) ("וגם", "או" וכו'). לרב מסומן באותיות גדולות לעומת פסוק פשוט שמסמנים אותו באותיות קטנות (לרב q,p)

פסוק פשוט - לא ניתן לפירוק, ונקרא גם אטומי.

קשרים: מרכיב שמחליף את מילות הקישור בעברית.

לוגיקה בנויה מ-3 מרכיבים:

תחביר (סינטקס)

משמעות (סמנטיקה)

מערכת ההסקה (פחות נגע בזה).

קשרים

1) **וגם**: "$\wedge$" $\underbrace{x \wedge y}_{\text{פסוק מורכב}} = \text{פסוק ב'} \wedge \text{פסוק א'}$ כאשר x,y פסוקים פשוטים

[**טבלת אמת**: דרך שלנו להציג משמעות של פסוק, כלומר אמת/שקר.]

דוגמאות לסינטקס:

$(p \wedge q) \wedge r$

$(p \wedge q) \wedge (r \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2) או: "$\vee$"

$p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

דוגמאות לסינטקס:

$[(p \wedge q) \vee (r \wedge p)] \vee q$

הערה

מס' העמודות נקבע ע"פ מס' הפסוקים האטומים

מס' השורות נקבע ע"פ 2 בחזקת מס' הפסוקים האטומים.

3) שלילה: "$\neg$"

$\neg p$

דוגמאות לסינטקס:

p	$\neg p$
T	F
F	T

$\neg(\neg p)$

$[\neg(p \wedge q)] \vee r$

$\neg[(p \wedge q) \vee r]$

4) גרירה (אם אז): "$\leftarrow$" או "$\rightarrow$"

הנחה, מסקנה

$p \rightarrow q$

אם p אז q

דוגמאות לסינטקס:

$(p \vee q) \rightarrow (r \vee (p \vee q))$, $q \leftarrow p$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

5) ~~דשי~~ גרירה כפולה (אמ"מ): "$\leftrightarrow$"

$p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

10.11.19

דיסקרטית

הבחנה לפי משמעות הפסוק

טאוטולוגיה:

פסוק, שלא משנה לאיזה השמה (כלומר הערך הסופי שלה) תמיד יהיה T.

דוגמאו: $q \vee \neg q$

לא טאוטולוגיה

מספיק שתהיה השמה אחת לפסוקים כך שהערך יהיה F, הפסוק יקרא לא טאוטולוגיה. יקרא סתם פסוק.

סתירה

פסוק שלא משנה לאיזה השמה, הערך הסופי תמיד יהיה F.

דוגמאו: $p \vee \neg p$

לא סתירה

מספיק שתהיה השמה אחת לפסוקים כך שהערך יהיה T, הפסוק יקרא לא סתירה. יקרא סתם פסוק.

* כדי להוכיח טאוטולוגיה/סתירה נשתמש בטבלת אמת.
* כדי להוכית שלא טאוטולוגיה ולא סתירה נראה 2 הצבות בהן מתקבל T, וְ- F.

סדר פעולות קשרים

1) $\neg$
2) $\wedge$
3) $\vee$
4) $\rightarrow$
5) $\leftrightarrow$

פסוקים שקולים

יהיו p, q פסוקים. נאמר ש-p וְ-q שקולים לוגית אם לכל הצבת ערכי אמת לפסוקים האטומים שלהם, נקבל משני הפסוקים את אותו ערך אמת.

נסמן ע"י $p \equiv q$.

כללי פישוט (*יש בעמ' 56 עוד).

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

תרגילים

1) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \overset{\text{פילוג}}{\equiv} (p \vee \neg p) \wedge q \overset{\text{טאוטולוגיה}}{\equiv} T \wedge q \overset{\text{זהות}}{\equiv} q$ "

הוכחה לחוק הבליעה

2) $p \wedge (q \vee p) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee p \equiv (p \vee p) \wedge (q \vee p) \equiv p \wedge (q \vee p)$ "

לא זהו... שוב!

$$p \wedge (q \vee p) \equiv (p \vee F) \wedge (q \vee p) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (F \wedge q) \equiv$$

$$p \vee F \equiv p$$

17.11.19

דיסקרטית

בניית פסוק ע"י טבלת אמת

דוגמא א'

p	q	r	?	פסוק עזר ① $p\wedge q\wedge r$	② $p\wedge\neg q\wedge r$	③ $\neg p\wedge\neg q\wedge r$	$1\vee2\vee3$
T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

ולכן, הפסוק הוא (לפי ה-T):

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$$

שיטה זו נקראת DNF.

מה שמאפיין אותה, זה הסינטקס עם הקשרים הספציפיים $(\wedge)\vee(\wedge)\vee(\wedge)$ בתוך הפסוקים נמצא הקשר וגם וביניהם הקשר או

מה שמשפיע על אורך הפסוק הוא כמות הפסוקים ואו כמות ה-T שבפסוק. (אם יש טאוטולוגיה או סתירה הפסוק יהיה קצר).

דוגמא ב'

p	q	r	?	① $\neg p\vee\neg q\vee r$	② $\neg p\vee q\vee r$	③ $p\vee\neg q\vee\neg r$	④ $p\vee\neg q\vee r$	⑤ $p\vee q\vee r$	$1\wedge2\wedge3\wedge4\wedge5$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	F	F

ולכן, הפסוק הוא (לפי F):

$$(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)$$

שיטה זו נקראת CNF.

בדומה לDNF, הסינטקס בנוי בצורה של $(\vee)\wedge(\vee)\wedge(\vee)$.

* הפסוקים בדוגמא א' ו-ב' שקולים.

קבוצה שלמה של קשרים

~~מספיקים בשביל לבטא~~ ~~כל פסוק כלשהו~~. ניתן בעזרתם לבטא כל ביטוי שהוא.

לדוגמא:

$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ $\{\neg, \vee\}$

$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$ $\{\neg, \wedge\}$

סיום לוגיקה פסוקית.

לוגיקה של פרדיקטים

כמתים

קיים: מסומן $\exists$

לכל: מסומן $\forall$

דוגמאות:

$\underbrace{x \text{ הוא חכם}}$ $\forall_x$ - לכל x מתקיים שx הוא חכם / כל x הוא חכם.

$\underbrace{x \text{ הוא חכם}}$ $\exists_x$ - קיים x כך ש x הוא חכם

$\underbrace{y \text{ היא אמא של } x}$ $\forall_x \exists_y$ - לכל x קיים y כך שהיא אמא שלו.

$\forall_x \exists_y \not\equiv \exists_y \forall_x$ לרב לא שקול.

$$\left.\begin{aligned}\forall_x \forall_y &\equiv \forall_y \forall_x\\ \exists_x \exists_y &\equiv \exists_y \exists_x\end{aligned}\right\}$$ שקולים תמיד.

$\neg\forall_x(\text{א}) \equiv \exists_x \neg(\text{א})$

$\neg\exists_x(\text{א}) \equiv \forall_x \neg(\text{א})$

$\exists_x(\text{א} \vee \text{ב}) \equiv \exists_x(\text{א}) \vee \exists_x(\text{ב})$

$\forall_x(\text{א} \wedge \text{ב}) \equiv \forall_x(\text{א}) \wedge \forall(\text{ב})$

24.11.19

דיסקרטית

תורת הקבוצות

* הערה: אקסיומה - טיעון שלא נוכיח אותו

מושגים

קבוצה - קבוצה היא אוסף של פריטים שונים זה מזה.

קבוצה מורכבת מ"איברים", והם לא חייבים להיות קשורים. אין חשיבות לסדר, גודל, כמות ההופעות של כל איבר וכו'.

אם איבר נמצא בקבוצה, נאמר שהוא שייך לקבוצה.

אם איבר לא נמצא בקבוצה, נאמר שהוא לא שייך לקבוצה.

סימונים

- קבוצה נסמן כך:
- {איבר ג', איבר ב', איבר א'}: + אין משמעות לסדר פנימי בין האיברים. {א,ב,ג} = {ג,ב,א}
  + אין משמעות לכמות הופעות של איבר ספציפי {א,ב,ג} = {א,א,ב,ג,ב}
  - אם יש הרבה איברים, לכתוב את הקבוצה נהיה בעייתי.
  - אם יש אינסוף איברים, קשה לייצג אותן כקבוצה.
- הגדרה מילולית
- {תנאי לאיבר | תיאור איבר}: לדוגמה: {x | x הוא סטודנט}

"כך ש"

$\{x \mid$ x מתחלק ב-2 ללא שארית$\} = \{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$

- שייך נסמן ע"י $\in$ לדוגמה $6 \in \{x \mid$ x מתחלק ב-2 ללא שארית$\}$
- לא שייך נסמן ע"י $\notin$ לדוגמה $5 \notin \{x \mid$ x מתחלק ב-2 ללא שארית$\}$
- מקובל לסמן קבוצה באות גדולה לדוגמה: $A=\{17,*,3,\#\}$

ונקבל ש $3\in A$, $6\notin A$

הגדרה

- תהי A קבוצה סופית, גודלה הוא מס' האיברים ששייכים ל-A. נסמן ב $|A|$.

לדוגמה: הגודל של $\{17,*,3,\#\}$ הוא 4 $\leftarrow$ $|A|=4$

הגודל של הטבעיים לא מוגדר.

הערה

בתוך קבוצה, יכול להיות איבר שהוא קבוצה בפני עצמה.

לדוגמא:

$D = \{17, \{17, *, 3, \#\},$ שולחן$, N\}$ $\leftarrow$ $|D| = 4$

$E = \{D, 3, \mathbb{Z}\}$ $\leftarrow$ $|E| = 3$

הקבוצה הריקה

הגדרה

קבוצה שלא מכילה איברים. כלומר, אין אף איבר ששייך לקבוצה.

נסמן: $\{\ \}$ או "הקבוצה הריקה" או $\emptyset$.

הקבוצה הריקה יכולה להיות שייכת לקבוצה אחרת.

לדוגמא: $C = \{\emptyset\}$ $|C| = 1$.

$G = \{\{\emptyset\}\}$ $|G| = 1$ (קבוצה שמכילה קבוצה שמכילה את הקבוצה הריקה).

שוויון קבוצות

קבוצות שוות - הן אותן הקבוצה (באותן האיברים, אין איברים שונים).

קבוצות לא שוות - כאשר קבוצות לא שוות.

הגדרה

$A = B$: $\forall x \quad x \in A \longleftrightarrow x \in B$

השלילה: $(A \neq B)$:

$$\neg(A=B) : \neg(\forall x \quad x \in A \longleftrightarrow x \in B) =$$
$$= \exists x \quad \neg(x \in A \rightarrow x \in B \ \wedge \ x \in B \longrightarrow x \in A) =$$
$$= \exists x \quad \neg((\neg x \in A \vee x \in B) \wedge (\neg x \in B \vee x \in A)) =$$
$$= \exists x \quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

הגדרה

תהינה A, B קבוצות. נאמר ש-B מוכלת ב-A אם כל איבר ששייך ל-B שייך גם ל-A. נסמן $B \subseteq A$.

דוגמא:

$\{17, *\} \subseteq \{17, *, 3, \#\}$

$\{3\} \subseteq \{17, *, 3, \#\}$

$\{6\} \nsubseteq \{17, *, 3, \#\}$

כפסוק לוגי

$B \subseteq A: \quad \forall x \quad x\in B \longrightarrow x\in A$

הגדרת השלילה $\quad B \not\subseteq A$

$B \not\subseteq A \doteq (B\subseteq A) = \neg(\forall x \quad x\in B \to x\in A) =$

$= \exists_x \quad \neg(x\in B \vee x\in A) =$

$\exists_x \quad x\in B \wedge x\notin A$.,

הערה

לכל קבוצה A מתקיים $\quad \emptyset \subseteq A \quad$ (בגלל גרירה ריקה $\quad \underbrace{(\underbrace{x\in\emptyset}_{F} \to x\in A}_{T}$

באופן ריק

1.12.19

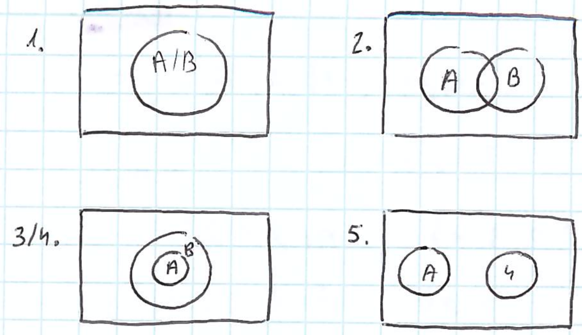
לוגיקה

תורת הקבוצות

תזכורת: תהי"נה A, B קבוצות.

האפשרויות הקיימות:

1. $A=B$
2. $A \neq B$
3. $A \subseteq B$
4. $B \subseteq A$
5. A, B זרות.



הגדרה

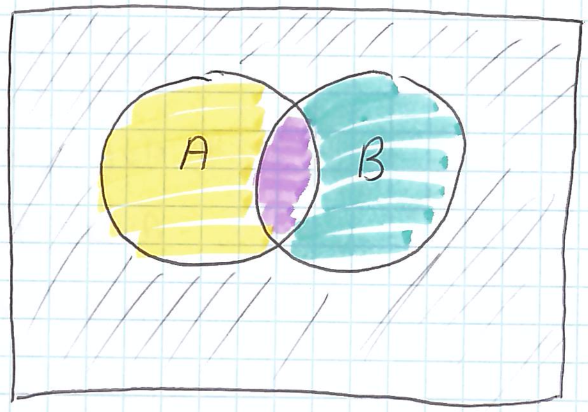
תהי"נה A, B קבוצות. נאמר ש- A, B זרות אם אין איבר ששייך לשתי הקבוצות.

דיאגרמת וון

עולם- אוסף כל האיברים הבודדים. הוא סוג של קבוצה ענקית שמכילה הכל. סימון- U.

לדוגמא:
עולם- הטבעיים.
$A=\{n \mid n \text{ זוגי}\}$
$B=\{n \mid 10<n\}$

הערה
הקבוצה הריקה יכולה להיות שווה וצרה לעצמה.



- איברים שב- A ולא ב- B (צהוב)
- איברים שב- B ולא ב- A (טורקיז)
- איברים שגם ב- A וגם ב- B (סגול)
- איברים שלא נמצאים ב A וגם B (קווים)

חשוב!

דיאגרמת וון זאת <u>לא</u> הוכחה!

פעולות על קבוצות

תהיינה A, B קבוצות (מתוך עולם U).

1. חיתוך

נסמן $A \cap B$, נגדיר: $\{x \in U \mid x \in B \text{ וגם } x \in A\}$

דוגמא: $U = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{1,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $A \cap B = \{3\}$.

$A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,1,4,5\}$, $A \cap B = \{5,2,1\}$

$A = \{1,2,5\}$, $B = \{4\}$, $A \cap B = \emptyset = \{\}$

פסוק לוגי

$$\forall x \; [x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B]$$

2. איחוד

נסמן $A \cup B$, נגדיר: $\{x \in U \mid x \in B \text{ או } x \in A\}$

פסוק לוגי

$$\forall x \; [x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B\}$$

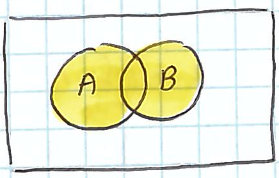
דוגמא

$A = \{1,3\}$ $B = \{2,3,4\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4\}$

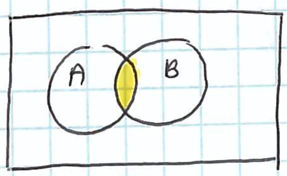
$A = \{1,2,3,5\}$ $B = \{2,3,4\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{1,2\}$ $B = \emptyset$ $A \cup B = A = \{1,2\}$

$A = \emptyset$ $B = \emptyset$, $A \cup B = \emptyset$



$A \cup B$



$A \cap B$

3. הפרש

סימון. $A \setminus B$ או $A-B$, $\{x \mid x \in A$ וגם $x \notin B\}$

פסוק לוגי

$$\forall x \ [x \in A \setminus B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B]$$

דוגמא

$A = \{1,3\}$ $B = \{2,3,4\}$ $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{2,4\}$

$A = \{1,2,3,5\}$ $B = \{2,1,4,5\}$ $A \setminus B = \{3\}$, $B \setminus A = \{4\}$

4. משלים

סימון, $\bar{A}$ או A^c $\{x \mid x \notin A\}$

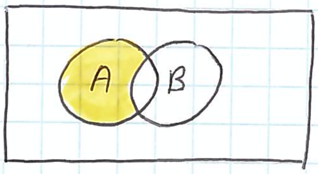
פסוק לוגי

$$\forall x \ [x \in \bar{A} \longleftrightarrow x \notin A]$$

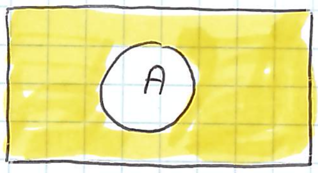
דוגמא

$A = \{1,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ $\bar{A} = \{2,4,5\}$, $\bar{B} = \{1,5\}$

$A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,1,4,5\}$. $\bar{A} = \{4\}$, $\bar{B} = \{3\}$



$A \setminus B$



$\bar{A}$

רשימת שוויונים בין קבוצות

מקרים פרטיים

תהי״ה A קבוצה.

$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \emptyset = A$ $U \cup A = U$ $A \setminus \emptyset = A$ $\bar{U} = \emptyset$

$A \cap A = A$ $A \cup A = A$ $U \cap A = A$ $\emptyset \setminus A = \emptyset$ $\bar{\emptyset} = U$

$U \setminus A = \bar{A}$ $A \setminus A = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = U$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

מקרים כלליים

תהיינה A,B,C קבוצות.

$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$, חילופיות.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, קיבוציות.

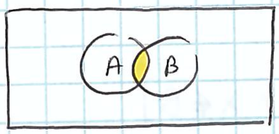
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, פילוג

$\bar{(\bar{A})} = A$ משלים.

$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$, דה מורגן.

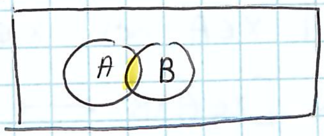
$A \setminus B = A \cap \bar{B}$

דוגמאות לדיאגרמות ון לשוויונים:



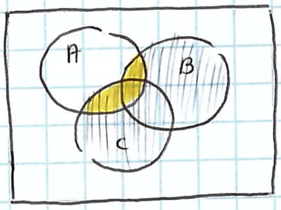
$A \cap B$

$\overset{?}{=}$



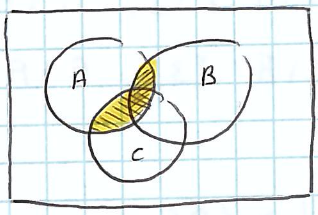
$B \cap A$

אותו שטח צבוע, פה זהה.



$A \cap (B \cup C)$

$=$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

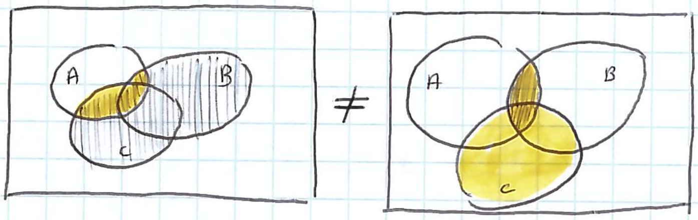
8.12.19

דיסקרטית

המשך משיעור קודם.

דוגמא II

$$A \cap (B \cup C) \overset{?}{=} (A \cap B) \cup C$$



הערה

דיאגרמה היא לא הוכחה. כדי למצוא דוגמא נגדית נוודא שהחלק בתשובה השונה לא ריק.

נתן דוגמא נגדית:

$C=\{1,2\}$, $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4\}$

$C=\{1\}$, $A=\emptyset$, $B=\emptyset$

$$(B\cup C)\cap A = (\{1\}\cup\emptyset)\cap\emptyset = \{1\}\cap\emptyset = \emptyset$$

$$(A\cap B)\cup C = (\emptyset\cap\emptyset)\cup\{1\} = \emptyset\cup\{1\} = \{1\}$$

הוכחת שיוויון בין קבוצות

נשתמש בשיוויונים המוסכמים (אלא אם מנסים להוכיח אותם עצמם, או כאשר יש לנו ידע מקדים (כלומר הנתונים שונים מההנחה הכללית על קבוצות).

כאשר אין אפשרות להוכיח בעזרת שימוש בשיוויון ידועים (קיימים):

1. כי אין
2. כי יש אינפורמציה נוספת/כי מדובר בקבוצות עם ידע נוסף/נתונים מיוחדים.

דוגמא עבור 1 -

טענה: לכל 3 קבוצות A,B,C מתקיים $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

רקע:

ידוע לנו ש $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \lor x\in B$

$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \land x\in B$

$A=B \Leftrightarrow (\forall x\ \ x\in A \Longleftrightarrow x\in B)$

$x\in A\cup(B\cap C) \overset{\text{אומ"מ}}{\Longleftrightarrow} x\in A \lor x\in B\cup C \Longleftrightarrow x\in A \lor (x\in B \land x\in C)$

הוכחה: צ"ל שלכל x מתקיים: $x\in (A\cup B)\cap(A\cup C) \iff x\in A\cup(B\cap C) \quad \forall x$

יהי x איבר כלשהו.

$x\in A\cup(B\cap C) \overset{\text{הגדרת איחוד}}{\iff} x\in A \vee x\in(B\cap C) \overset{\text{הגדרת חיתוך}}{\iff} x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C) \overset{\text{פילוג}}{\iff}$

$(x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C) \overset{\text{הגדרת איחוד}}{\iff} x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C \overset{\text{הגדרת חיתוך}}{\iff}$

$x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$ מש"ל

הוכחה של הכלה בין קבוצות

טענה: לכל 2 קבוצות A,B מתקיים: $(A\cup B)\setminus B \subseteq A$

רקע:

איך מוכיחים טענת גרירה.

דוגמא: טענה לכל x,y מתקיים אם $0<x<y$ אז $x^2<y^2$

הוכחה

יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כלשהם. מספיק להוכיח שאם P הוא T אז q הוא T.

נניח ש $0<x<y$ מתקיים. צ"ל $x^2<y^2$

$\underbrace{0<x<y}_{T} \Rightarrow x<y$ וגם $0<x$ $\overset{\text{הכפלת x משני הצדדים}}{\Rightarrow} x^2<yx \overset{x<y \text{, הגדלת הצד הגדול}}{\Rightarrow} x^2<y^2$. מש"ל

15.12.19

דיסקרטית

איך להוכיח טענה מהמבנה של: אם p אז q ($p \to q$)

צ"ל $p \Rightarrow q$

שיטה ראשונה - ישירה

הוכחה

נתון p. צ"ל את q.

$$\underbrace{\quad}_{\text{T ידוע}} \wedge \underbrace{\quad}_{\text{T}} \xRightarrow{\text{הסקה}} \dots \Rightarrow q$$

לדוגמא: $x \in A \wedge A \subseteq B \Rightarrow x \in B$.

תרגיל

תזכורת

$A \subseteq B: \forall x \; x \in A \to x \in B$

נתון $A \cap B = A$ הוכיחו $A \subseteq B$.

צ"ל $\forall x \; x \in A \to x \in B$

הוכחה

יהי x כלשהו. צ"ל $x \in A \to x \in B$

נתון $x \in A$ צ"ל $x \in B$

$$x \in A \wedge A \cap B = A \underset{\text{הגדרת שוויון}}{\Longrightarrow} x \in A \wedge x \in A \cap B \underset{\text{הגדרת חיתוך}}{\Longrightarrow} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$$

מש"ל ■

שיטה שנייה - עיאוגית

צ"ל $p \to q$ $\Leftarrow$) $(p \to q \equiv \neg q \to \neg p)$.

צ"ל $\neg q \to \neg p$

נתון $\neg q$ צ"ל $\neg p$. השאר כאות הוכחה בגישה הראשונה.

תרגיל

נתון $A \setminus B \subseteq C \cap D$, $x \in A$ הוכיחו שאם $x \notin D$ אז $x \in B$.

צ"ל $x \notin D$ אז $x \in B$

צ"ל $x \notin B \leftarrow x \in D$ נתון $x \notin B$ צ"ל $x \in D$

$$x \in A \wedge x \notin B \underset{\text{הגדרת הפרש קבוצות}}{\Longrightarrow} x \in A \setminus B \underset{A \setminus B \subseteq C \cap D}{\Longrightarrow} x \in C \cap D \Rightarrow x \in C \wedge x \in D \Rightarrow x \in D.$$

מש"ל

שיטה שלישית - על דרך השלילה

צ"ל $p \to q$.

צ"ל $(p \wedge \neg q) \to F$

נתון $p \wedge \neg q$ צ"ל F.

נתון $p, \neg q$ צ"ל F.

השאר צאת בשיטה הראשונה.

$$p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to F$$

p	q	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \to F$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

<u>הוכחה</u>

צ"ל $p \Rightarrow q$. נתון p צ"ל q.

נניח בשלילה $\neg q$ ואז משתמשים בשיטה הראשונה.

22.12.12

דיסקרטית

תרגילים

1) הוכיחו את הטענה הבאה:

אם $A \setminus B \subseteq C$ אז $A \setminus C \subseteq B$

הוכחה

$x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A \cap \bar{C} \Rightarrow x \in A \wedge x \in \bar{C} \Rightarrow x \in A \wedge x \in \bar{C} \wedge x \in U \Rightarrow$

$x \in A \wedge x \in \bar{C} \wedge x \in B \cup \bar{B} \Rightarrow x \in A \wedge x \in \bar{C} \wedge (x \in B \vee x \in \bar{B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in \bar{B})) \wedge x \in \bar{C} \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \cap \bar{B})) \wedge x \in \bar{C} =$

$\Rightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C)) \wedge x \in \bar{C}) \Rightarrow (x \in \bar{C} \wedge x \in A \wedge x \in B) \vee \underbrace{(x \in C \wedge x \in \bar{C})}_{\emptyset} \Rightarrow$

$x \in \bar{C} \wedge x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$ "

נניח בדרך השלילה

נניח בדרך השלילה ש $x \notin B$.

מנתון.

$x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A \wedge \boxed{x \notin C} \Rightarrow x \in A$

$x \wedge A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow \boxed{x \in C}$ $\Rightarrow x \in C \wedge x \in \bar{C} \Rightarrow x \in C \wedge x \notin C =$:סתירה

מנתון.

2) הוכיחו: אם $A \subseteq B \setminus \bar{C}$ אז A, C זרות. כלומר $A \cap C = \emptyset$

נניח בשלילה ש $A \cap C \neq 0$ כך שקיים $x \in A \cap C$

$x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \setminus C \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \cap \bar{C} \wedge x \in C \Rightarrow$

$x \in B \wedge x \in \bar{C} \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in \bar{C} \wedge C \Rightarrow x \in B \wedge \emptyset =$:סתירה

3) הוכיחו או הפריכו:

א) $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$

ב) $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup C$

הפרכה

א) $A = \{1\}$, $C = \{1\}$, $B = \{2\}$

$A \setminus (B \setminus C) = \{1\} \setminus (\{2\} \setminus \{1\}) = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\}$

$(A \setminus B) \setminus C = (\{1\} \setminus \{2\}) \setminus \{1\} = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$

$\{1\} \nsubseteq \emptyset$

ב) $x \in A \setminus (B \setminus C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \cap \bar{C}) \Rightarrow x \in A \cap (\bar{B} \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in \bar{B} \vee x \in C) \Rightarrow$

$(x \in A \wedge x \in \bar{B}) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow$

<u>נפרק למקרים</u>

א)

$$\underbrace{x\in A\setminus B}_{T} \to x\in A\cap\bar{B} \vee x\in C \Rightarrow x\in(A\setminus B)\cup C$$

ב)

$$\underbrace{x\in A \wedge x\in C}_{T} \Rightarrow (x\in C)\vee x\in A\setminus B \Rightarrow x\in(A\setminus B)\cup C$$

<u>הערה</u>

כשיש "או" ואין אופציה לפרק ולא הגענו למטרה, נפצל למקרים.

ג)

$$A\setminus C \subseteq (A\setminus B)\cup(B\setminus C)$$

30.12.19

דיסקרטית

תרגיל

הוכח או סתור ע"י דוגמה נגדית

1) $A\cap B=\emptyset \longleftrightarrow (A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$

פתרון

I אם $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$ אז $A\cap B=\emptyset$

נניח בשלילה ש $A\cap B\neq\emptyset$, כך שקיים $x\in A\cap B$ $\quad A\cap B\subseteq A\cup B$

$x\in A\cap B \overset{\text{חיתוך}}{\Rightarrow} x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \overset{\text{נתון}}{\Rightarrow} x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \overset{\text{איחוד}}{\Rightarrow} x\in(A\setminus B) \vee x\in B\setminus A \Rightarrow$

$(x\in A \wedge x\in\bar{B}) \vee (x\in B \wedge x\in\bar{A}) \overset{\text{משלים}}{\Rightarrow} (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in B \wedge x\notin A) \overset{\text{הפרש}}{\Rightarrow} x\notin B \vee x\notin A$

סתירה לכך ש $x\in B \wedge x\in A$. לכן $A\cap B=\emptyset$.

II אם $A\cap B=\emptyset$ אז $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$

א) אם $A\cap B=\emptyset$ אז $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\subseteq A\cup B$

$x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \overset{\text{הפרש ואיחוד}}{\Rightarrow} (x\in A \wedge x\in\bar{B}) \cup (x\in B \wedge x\in\bar{A}) \overset{\text{הפרש}}{\Rightarrow} x\in A \vee x\in B \overset{\text{איחוד}}{\Rightarrow} x\in A\cup B$

ב) אם $A\cap B=\emptyset$ אז $A\cup B\subseteq(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$x\in A\cup B \overset{\text{איחוד}}{\Rightarrow} x\in A \vee x\in B \overset{A\cap U=A}{\Rightarrow} (x\in A \wedge x\in U) \vee (x\in B \wedge x\in U) \overset{A\vee\bar{A}=U}{\Rightarrow}$

$(x\in A \wedge (x\in B \vee x\in\bar{B})) \vee (x\in B \wedge (x\in A \vee x\in\bar{A})) \overset{\text{פילוג}}{\Rightarrow} ((x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in\bar{B}))\vee((x\in B\wedge x\in A)\vee(x\in B\wedge x$

$\overset{\text{הפרש},\ A\cap B=\emptyset}{\Rightarrow}((x\in\emptyset \vee x\in A\setminus B) \vee (x\in\emptyset \vee x\in B\setminus A)) \overset{A\vee\emptyset=A}{\Rightarrow} x\in A\setminus B \vee x\in B\setminus A \overset{\text{איחוד}}{\Rightarrow} x\in(A\setminus B)\vee(B\setminus A)$

הראנו הכלה דו כיוונית ולכן מתקיים השוויון.

2) $\bar{B}\cap\bar{C}=\bar{B}\cup C \leftrightarrow (A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$ (ספוילר: בעיות הפרכה...)

I אם $\bar{B}\cap\bar{C}=\bar{B}\cup C$ אז $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$

א) $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$

$x\in(A\setminus B)\cap\bar{C} \Rightarrow x\in A\cap\bar{B}\cap\bar{C} \Rightarrow x\in A\wedge(x\in\bar{B}\cup C) \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B\cap\bar{C} \Rightarrow x\in A\setminus(B\setminus C)$

ב) $A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$

$x\in A\setminus(B\setminus C) \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B\cap\bar{C} \Rightarrow x\in A\wedge x\in\bar{B}\cup C \Rightarrow x\in A \wedge x\in\bar{B}\cap\bar{C} \Rightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$

II לא

א) אם $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\setminus C)$ $\quad \overline{B}\cap\overline{C} = \overline{B}\cup C$

$A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap(\overline{B}\cup C)$

$x\in\overline{B}\cap\overline{C} \Rightarrow x\in\overline{B} \wedge x\in\overline{C} \Rightarrow x\in\overline{B} \Rightarrow x\in\overline{B}\cup C$

ב) $\not\subseteq$ $\quad \overline{B}\cup C \subseteq \overline{B}\cap\overline{C}$

<u>הפרכה</u>

$U=\{1,2,3\}$, $A=\emptyset$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$

$\overline{C}=\{1,3\}$, $\overline{B}=\{2,3\}$

$A\setminus(B\setminus C)=\emptyset\setminus(\{1\}\setminus\{2\})=\emptyset\setminus\{1\}=\emptyset$

$(A\setminus B)\setminus C=(\emptyset\setminus\{1\})\setminus\{2\}=\emptyset\setminus\{2\}=\emptyset$

אם

$\overline{B}\cap\overline{C}=\{3\}$
$\neq$
$\overline{B}\cup C=\{2,3\}$

5.1.20

דיסקרטית

הגדרה

תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A היא:

(כל הקבוצות שמוכלות ב-A).

אוסף כל תתי הקבוצות של A.

$$\{B \mid B \subseteq A\} = P(A)$$

הגדרה שקולה:

$$B \in P(A) \Longleftrightarrow B \subseteq A$$

מינוח

תהי A קבוצה, אזי $B \subseteq A$ נאמר ש-B תת קבוצה של A.

דוגמאות

- $A = \{1,2\}$

  $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset, \{1,2\}\}$

הערה

לכל קבוצה A, $A \in P(A)$, $\emptyset \in P(A)$. כי $A \subseteq A$.

- $A = \{1\}$

  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

- $A = \{1,2,3\}$

  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,$

- $A = \emptyset$

  $P(A) = \{\emptyset\}$

טענה

אם A סופית, ומס' האיברים ב-A הוא n ($|A| = n$)

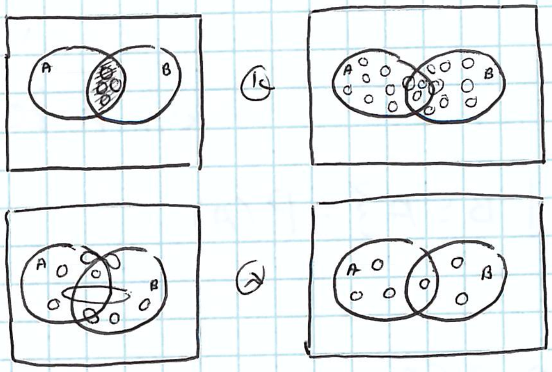
אז $|P(A)| = 2^n$

- $A = \mathbb{N}$

  $P(A) = P(\mathbb{N}) = \{\{0\}, \emptyset, \mathbb{N}, \{420, 69\}, \ldots\}$

א) $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$ הוכיחו או סתרו:

ב) $P(A\cup B) = P(A)\cup P(B)$



2) הפרכה

$A=\{1\},\ B=\{2\}$

$\{1,2\}\in P(\{1,2\}) = P(\{1\}\cup\{2\})$

$\{1,2\}\notin P(\{1\})\cup P(\{2\}) = \{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$,

1) הוכחה

I $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$, תהי S קבוצה $S\in P(A\cap B)$

$S\in P(A\cap B) \overset{\text{מהגדרה}}{\Longrightarrow} S\subseteq A\cap B \overset{(*)}{\Longrightarrow} S\subseteq A \wedge S\subseteq B \Longrightarrow S\in P(A)\wedge S\in P(B) \Longrightarrow$

$S\in P(A)\wedge P(B)$

(*) טענת עזר

$S\subseteq A\cap B \Longrightarrow S\subseteq A \wedge S\subseteq B$

I $S\subseteq A$ צ"ל

$\left.\begin{matrix} x\in S \\ S\subseteq A\cap B\end{matrix}\right\} \overset{\text{הכלה}}{} x\in A\cap B \Longrightarrow x\in A \wedge x\in B \Longrightarrow x\in B$,,

I $S\subseteq B$ צ"ל

בדומה לקודם.

II $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$ תהי S קבוצה $S\in P(A)\wedge P(B)$

$S\in P(A)\wedge P(B) \Longrightarrow S\in P(A) \wedge S\in P(B) \Longrightarrow S\subseteq A \wedge S\subseteq B \overset{(*)}{\Longrightarrow} S\subseteq A\cap B \Longrightarrow$

$S\in P(A\cap B)$

(*) טענת עזר

$S\subseteq A \wedge S\subseteq B \Longrightarrow S\subseteq A\cap B$

I $S\subseteq A\cap B$ צ"ל

$\left.\begin{matrix} x\in S \\ S\subseteq A\end{matrix}\right\} \overset{\text{הכלה}}{\Longrightarrow} x\in A$

$\left.\begin{matrix} x\in S \\ S\subseteq B\end{matrix}\right\} \overset{\text{הכלה}}{\Longrightarrow} x\in B$

$\Bigg\}\ x\in A\cap B$

זוג סדור - הוא איבר שמסומן (a,b).

הערות:

1) $(a,b) \neq (b,a)$.

2) (a,a) הוא איבר השונה מ-a.

מכפלה קרטזית

הגדרה

תהינה A,B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A,B היא:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \ , b \in B\}$$

הערה

- אם A,B סופיות !- $|A|=n$, $|B|=m$ אזי $|A \times B| = n \cdot m$
  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $A \times B \neq B \times A$
- יכול להיות ש $A \neq B$ או A וגם B יהיו אינסופיות.

12.1.20

דיסקרטית

קבוצה חזקה

תזכורת

1) יהיה A קבוצה. קבוצה החזקה של A היא $P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$

דוגמא:

$A=\{a,b\}$

$P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

2) $S\subseteq A \leftrightarrow S\in P(A)$

תרגיל

הוכח: $A\subseteq B \longleftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

דוגמא: $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$ ← $A\subseteq B$

$P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$, $P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ ← $P(A)\subseteq P(B)$

הוכחה

I נתון $A\subseteq B$ נוכיח $P(A)\subseteq P(B)$, אז קיים $S\in P(A)$

$$S\in P(A) \Rightarrow \underset{\substack{\text{* טענת עזר} \\ A\subseteq B \text{ נתון}}}{S\subseteq A \Rightarrow S\subseteq B} \Rightarrow S\in P(B)$$

*** טענת עזר**

אם $S\subseteq A$ וגם $A\subseteq B$ אז $S\subseteq B$.

הוכחת טענת העזר

$$x\in S \underset{\substack{\text{נתון} \\ S\subseteq A}}{\Longrightarrow} x\in A \underset{\substack{\text{נתון} \\ A\subseteq B}}{\Longrightarrow} x\in B.$$

I נתון $P(A)\subseteq P(B)$ נוכיח $A\subseteq B$, אז קיים $x\in A$

דרך א'

$$x\in A \overset{\text{תכונה}}{\Longrightarrow} \{x\}\subseteq A \Longrightarrow \{x\}\in P(A) \underset{\substack{\text{נתון} \\ P(A)\subseteq P(B)}}{\Longrightarrow} \{x\}\in P(B) \overset{\text{תכונה}}{\Longrightarrow} \{x\}\subseteq B \overset{\text{תכונה}}{\Longrightarrow} x\in B$$

תכונה

דרך ב'

תכונה של קבוצת החזקה $A\in P(A)$

$$A\in P(A) \underset{\substack{\text{נתון} \\ P(A)\subseteq P(B)}}{\Longrightarrow} A\in P(B) \underset{\substack{\text{לפי תכונה} \\ A\subseteq B \\ A\in P(B)}}{\Longrightarrow} A\subseteq B$$

תרגיל

מהדף 2) ג) אם $A \in B$ אז $P(A) \in P(B)$

פתרון

נתון $A \in B$ צ"ל $P(A) \in P(B)$

דוגמא נגדית

$A = \{1\}$, $B = \{\{1\},\{2\}\}$. אז $A \in B$ אבל

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1\},\{2\}\}\}$

$P(A) \notin P(B)$

ד) אם $P(A) \in P(B)$ אז $A \in B$.

$$P(A) \in P(B) \overset{\text{תכונה}}{\Longrightarrow} \underset{\substack{\text{כל קבוצה מקיימת} \\ A \in P(A)}}{P(A) \subseteq B} \Longrightarrow A \in P(A) \subseteq B \overset{\text{הכלה}}{\Longrightarrow} A \in B$$

תרגיל

$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$

מצא $P(A)$, $P(B)$, $P(A) \cup P(B)$, $P(A \cup B)$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

$P(A \cup B) = P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

תרגיל *הופיע בהרבה מבחנים.

הוכיח $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ $\longleftrightarrow$ $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

I אם $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ אז $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

I אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

הערה: כשיש בנתון "או" אז כל אחד מהנתונים בנפרד צריך להוכיח את המסקנה כי אנחנו לא יודעים איזה נתון נכון.

$A \subseteq B \xrightarrow[\text{לפי תרגיל ראשון}]{} P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow P(B) \cup P(A) = P(B)$

$A \subseteq B = B \Longrightarrow P(B \cup A) = P(B)$

$$\Big\} \longrightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

II אם $B\subseteq A$ אז $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$

$$\left.\begin{array}{l} B\subseteq A \Rightarrow P(B)\subseteq P(A) \Rightarrow P(B)\cup P(A)=P(A) \\ B\subseteq A \Rightarrow A\cup B=A \Rightarrow P(B\cup A)=P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow P(B)\cup P(A)=P(A\cup B)$$

II אם $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$ אז $B\subseteq A$ או $A\subseteq B$.

הערה:
אם יש להוכיח או
בדרך כלל מוכיחים בדרך
השלילה.

<u>דרך א'</u>

נניח בשלילה שלא נכון ש $(B\subseteq A$ או $A\subseteq B)$

$$\neg(B\subseteq A \vee A\subseteq B) \overset{\text{דה מורגן}}{\Longrightarrow} (B\nsubseteq A \wedge A\nsubseteq B)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\nsubseteq B \Rightarrow a\in A \wedge a\notin B \Rightarrow a\in A\cup B \\ B\nsubseteq B \Rightarrow b\in B \wedge b\notin A \Rightarrow b\in B\cup A \end{array}\right\} \longrightarrow \{a,b\}\subseteq A\cup B \overset{\text{תכונה}}{\Longrightarrow} \{a,b\}\in P(A\cup B) \overset{\text{נתון}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \{a,b\}\in P(A)\cup P(B) \Rightarrow \{a,b\}\in P(A) \vee \{a,b\}\in P(B) \Rightarrow \{a,b\}\subseteq A \vee \{a,b\}\subseteq B \Rightarrow$$

$b\in A \vee a\in B$ סתירה $b\notin A \wedge a\notin B$

לכן $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

<u>דרך ב'</u>

$$A\cup B\in P(A\cup B) \overset{\text{נתון}}{\Longrightarrow} A\cup B\in P(A)\cup P(B) \overset{\text{איחוד}}{\Longrightarrow} A\cup B\in P(A) \vee A\cup B\in P(B) \overset{\text{תכונה}}{\Longrightarrow}$$

לפי תכונה

$$\Rightarrow A\cup B\subseteq A \text{ או } A\cup B\subseteq B \underset{\text{איחוד}}{\Longrightarrow} B\subseteq A\cup B\subseteq A \vee A\subseteq A\cup B\subseteq B \Rightarrow$$

טענת עבר הקודמת

$B\subseteq A \vee A\subseteq B$

<u>מכפלה קרטזית</u>

<u>הגדרה:</u> יהיו A,B קבוצות.

זוג סדור הוא (a,b) כך ש $a\in A$ ו $b\in B$ (עם חשיבות לסדר).

<u>הגדרה</u> יהיו A,B קבוצות.

מכפלה קרטזית של A עם B היא $A\times B\ \{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$

(אוסף כל הצוגות הסדורים).

lcnd 13

$B = \{4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ (1

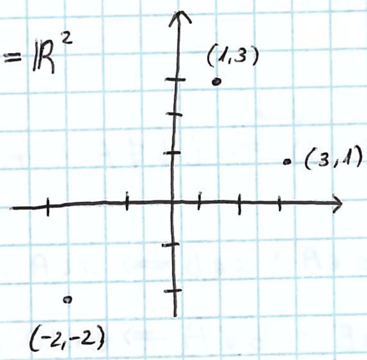
$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$

$B \times A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)\}$

$B \times B = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (2



13.1.20

דיסקרטית

המשך איברים סדורים

n-יה סדורה נראית כך: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

הערה:

עבור $n=2$ זהו זוג סדור.

מכפלה קרטזית

תהיינה $A_1, A_2, \dots, A_n$, n קבוצות.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

יחסים

הגדרה

תת קבוצה של מכפלה קרטזית נקראת יחס. (כאשר תת קבוצה זאת קבוצה שמוכלת בקבוצה הגדולה). (מכפלה קרטזית היא קבוצה שמוכלת בעצמה ולכן גם יחס, אבל יחס הוא לאו דווקא מכפלה קרטזית).

יחס בינארי

הגדרה (מקרה פרטי של יחסים).

תהיינה A, B קבוצות. יחס בינארי הוא קבוצה שמוכלת (תת קבוצה) ב- $A \times B$.

סימון: $R \subseteq A \times B \iff R$ יחס.

$(x,y) \in R$ או xRy ונאמר הזוג (x,y) מקיים את היחס R.

דוגמא

$A = B = \mathbb{N}$

- $R = \{(n,m) \mid n < m\}$ $(R \Rightarrow \text{"<"})$

  $(1,3) \in R$ או $1R3$ או $1 < 3$

  $(3,2) \notin R$ או $3 \not R 2$ או $3 \not< 2$

- $R = \{(n,m) \mid n = m\}$ $(R = \text{"="})$

  $(1,1) \in R$ או $1R1$ או $1=1$

  $(1,2) \notin R$ או $1 \not R 2$ או $1 \neq 2$

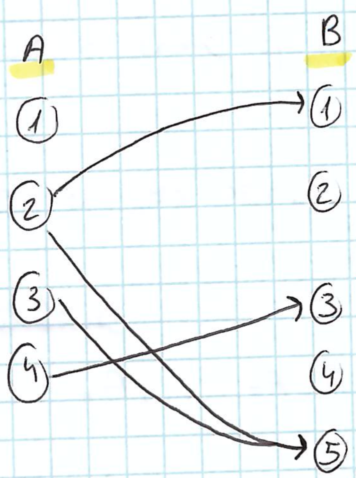
צורות הצגה של יחסים.

1) כתיבה מפורשת של האיברים ביחס.

2) מגרף - (גרף דו צדדי).

$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{(3,5),(2,1),(4,3),(2,5)\}$



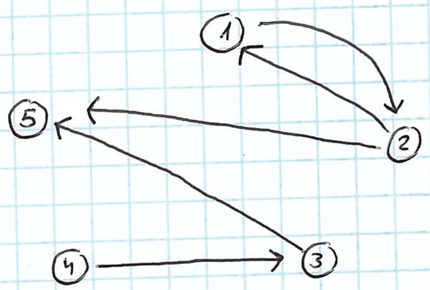
הגדרה

אם $A=B$ כלומר $R\subseteq A\times A$ נאמר ש-R יחס על A (מעל A).

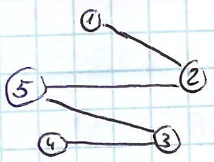
המשך ל-2

$A=\{1,2,3,4,5\}$, $R\subseteq A\times A$ $R=\{(3,5),(2,1),(4,3),(2,5),(1,2)\}$

(גרף מכוון)



(גרף לא מכוון היה נראה ככה)



כשאין חץ אין כיוון.

פעולות על יחסים

יהיו R_1, R_2 שמוכלים ב $A\times B$. (כלומר $A\times B = U$)

כמו מקבוצות: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$

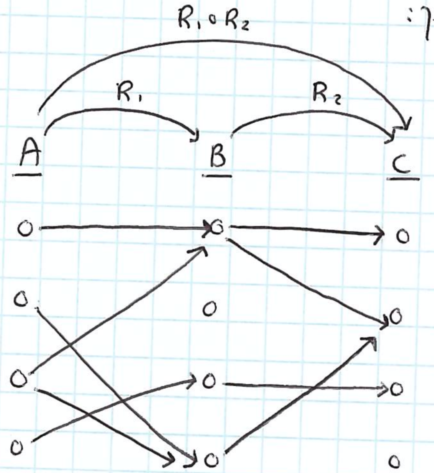
משלים: $\bar{R}_1 = A\times B \setminus R_1$ אז $(x,y)\in R \overset{\text{שלילה}}{\Longrightarrow} \neg[(x,y)\in R] \Longrightarrow (x,y)\notin R$

היפוך: $R\subseteq A\times B$ $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y)\in R\}$ $R^{-1}\subseteq B\times A$

לדוגמא: $R=\{(1,3),(2,5),(7,3),(5,2)\}$, $R^{-1}=\{(3,1),(5,2),(3,7),(2,5)\}$.

הרכבה: $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B\times C$ אז ההרכבה של R_1 על R_2 הוא יחס מ-A ל-C

ניסומן $R_1\circ R_2$ כלומר $R_1\circ R_2\subseteq A\times C$ ומוגדר כך:



(מסלול באורך 2)

$$R_1\circ R_2 = \{(a,c) \mid \exists b\in B \ (a,b)\in R_1 \wedge (b,c)\in R_2\}$$

$$(a,c)\in R_1\circ R_2 \Longleftrightarrow \exists b \ (a,b)\in R_1 \wedge (b,c)\in R_2$$